

Eidos e Identitas indiscernibilium en mecánica cuántica

(Eidos and Identitas Indiscernibilium
in Quantum Mechanics)

VICENTE LLAMAS ROIG

vllamasroig@yahoo.es

Pontificia Universidad Antonianum, Murcia

ORCID: 0000-0003-4830-3003

Resumen. El principio de *identitas indiscernibilium* tiene clara aplicación en contexto cuántico, superando el debate sobre la posibilidad de distinción de entes idénticos en parámetros espacio-temporales: la simetría definida por intercambio de la función de onda sin solapamiento describe el comportamiento de partículas como si fueran indistintas. Ese carácter de la función de onda se perfila en el ensayo como una propiedad relacional de observación, no del objeto cuántico en sí, cobrando el principio cariz epistemológico, desmarcado de la pulsión óntica propiamente objetual.

Palabras clave: identidad; propiedad; función de onda; solapamiento; simetría.

Abstract. The principle of *identitas indiscernibilium* can be thoroughly expressed in a quantum context, overcoming the debate about the possibility of distinction among identical entities according to space-time parameters: the symmetry defined by the exchange of the wave function without overlapping describes the behavior of particles as if they were alike. That nature of the wave function is depicted along the essay as a relational property of observation, not of the quantum object itself, making the principle take an epistemological turn, dissociated from the object ontic drive.

Keywords: identity; property; wave function; overlapping; symmetry.

Introducción

El problema de la identidad de los indiscernibles se remonta al *Teeteto* platónico (159a) pero cobra alcance más depurado en el *Discours de métaphysique* (Leibniz 1686, §9) en el que el filósofo de Leipzig impugna por razón suficiente (incompatibilidad con la sabiduría divina) la predicación de plena identidad de dos sustancias numéricamente diversas (por iguales que fueran dos seres, diferirían al menos en uno de sus predicados, no sólo porque uno ocupe un lugar distinto al otro en la serie numerable que los comprendiese):

No hay en la naturaleza dos seres reales y absolutos indiscernibles entre sí (Leibniz 1942, 78).

Los apoyos de la sanción leibniziana a la identidad de los indiscernibles son la tesis de la unicidad monádica en su serie infinita y el principio de razón suficiente (no hay tal razón para la repetición de posibles por contraria a la sabiduría divina).

Kant ensaya una plausible refutación en el *gedankenexperiment* (estrategia metodológica recurrente desde entonces, como testimonian el demonio de Maxwell, el gato de Schrödinger o los gemelos de Einstein) sobre la posibilidad existencial de dos gotas de agua isomorfas (Vaihinger 1922, 518–532).

Russell cita el siguiente pasaje de Leibniz:

Quando niego que haya dos gotas de agua perfectamente iguales, u otros dos cuerpos cualesquiera perfectamente indiscernibles entre sí, no estoy diciendo que sea absolutamente imposible suponerlos; sino que es algo contrario a la sabiduría divina, y que en consecuencia no existe. Sostengo que si existieran dos cosas perfectamente indiscernibles entre sí, serían dos: pero esa suposición es falsa, y contraria al gran principio de razón [suficiente].

Y aclara su sentido:

Todas las sustancias creadas forman una serie, en la cual toda posición intermedia posible entre el primero y el último de los términos está llenado una vez y sólo una vez (Russell 1977, 74).

Para el co-autor de los *Principia Mathematica*, los argumentos censurantes leibnizianos subsumirían en su metafísica sobre una confusión de fondo de la sustancia con la suma de sus predicados. Dos tesis a validar: la caracterización de un singular por sus cualidades, cuya completa enumeración le definiría, y la ultimidad e indefinibilidad de la diferencia numérica. Russell rechaza la noción de *particular*, reemplazándola por la de *haz de cualidades*, de suerte que bastaría con la repetición de cierto haz de cualidades para la derogación del principio que Leibniz defiende (en el *espacio experimentado*, además, la posición no se define por relaciones como en el espacio físico sino por cualidades –centralidad, ...–, el singular se constituye por cualidades, y la *preteridad subjetiva* –*subjective pastness*– con las series sucesivas de sensaciones que evoca juega un papel decisivo en el examen del principio).

Peirce lo juzga así:

Leibniz's 'principles of indiscernibles' is all nonsense. No doubt, all things differ; but there is no logical necessity for it (Peirce 1933, 4.311)

El principio establece, en la formulación más conocida, la identidad de dos objetos con todas sus propiedades en común (Grelling 1936, 252–259). Al margen del análisis incidental que pudieran concitar dos conceptos conspicuos del principio, propiedad e identidad, el debate sobre su carácter *a priori*, necesario o contingente, sigue abierto. La validez parece depender del modo en que se aborde el enunciado (dos objetos comparten todas sus propiedades cualitativas o cualitativas no relacionales), que en lógica de segundo orden responde a la forma: $\forall x, y \mid \forall \varphi (\varphi x \leftrightarrow \varphi y) \rightarrow x = y$. Versión conversiva del principio (indiscernibilidad de idénticos): $\forall x, y \mid (x = y) \rightarrow \forall \varphi (\varphi x \leftrightarrow \varphi y)$.

Del carácter lógico o metalógico del principio de *identitas indiscernibilium* se desprende su facultada vigencia en un mundo lógicamente posible (el aspecto de un mundo ilógico es inconcebible y, por ende, en cuanto ley lógica, no cabría formalizar coherentemente un mundo que la infringiese), pero para algunos no parece ser tanto un principio analítico, necesariamente verdadero en todos los mundos posibles, o un principio ontológico *acerca de* la totalidad de configuraciones posibles (cómo sea o pudiera ser

un mundo), cuanto un “metaprincipio acerca de todas las descripciones posibles” (Hacking 1975, 254), un metaprincipio prescriptivo de *cómo debe describirse* nuestro mundo. Para Wittgenstein la declaración de identidad en dualidad es un *Unsinn* o un postulado metafísico. La configuración de *Sachverhalten* a partir de propiedades externas o materiales de los objetos y sus interrelaciones convertiría en empíricas a las proposiciones que los denotan (tal sería la tesis que imputa a dos objetos comunidad total de propiedades, sin relación de implicación con su identidad). La garantía de análisis completo que confiere sentido al cracking de funciones de verdad para proposiciones elementales parece reclamar el principio de *identitas* que el *Tractatus* depone explícitamente: si dos objetos no pueden figurar del mismo modo en el mismo estado de cosas, entonces dos objetos no podrán tener todas sus propiedades en común (Godwin 1982, 80–82).

La cognación modal de objetos en el dominio semántico «estado» invita a testar el principio en el orden cuántico en el que la función de onda subroga todos los parámetros que procuran la descripción completa de una entidad en su singularización, propiedades aptas para cualificar intrínsecamente un número indefinido de objetos sobre la subrepticia pulsión de la identidad o la diferencia, aspectos relacionales que se sustraen al concepto de propiedad. La idea de una propiedad compuesta que, por su misma complejidad, fuera predicable de un sólo objeto, aun cuando cada elemento comprometido en el complejo lo fuese de más de uno, arraigada en una ontología corpuscular, se disipa en el horizonte de una ontología dualista que contempla la superposición de ondas, y más acusadamente en contextualización cuántica con el solapamiento de funciones de onda que brinda una dimensión novedosa a la exacción de identidad.

1. *Identitas indiscernibilium* en el orden cuántico: simetría de la función de onda bosónica

La diferencia *sólo numérica* de dos entidades iguales en todas sus propiedades tendría solución local en el ámbito newtoniano, pero si la función de onda dicta un estado *realmente* posible para un sistema, el solapamiento

de funciones agnadas para partículas idénticas refrendaría matizadamente en el orden cuántico la identidad de indiscernibles ontológicos allende la pura posibilidad lógica de ser que Leibniz no recusa (el alquimista de Nüremberg no asevera la imposibilidad abstracta de la identidad absoluta, sólo legitima la real). El signo anticonmutativo de la función de onda fotónica convertiría a la luz en paradigma fenoménico contra el principio de identidad.

Más allá del comportamiento de una partícula aislada en el campo central de fuerzas caracterizado por una función de energía potencial U , la ecuación de Schrödinger puede ser cotejada para dos partículas. La interacción electromagnética de dos electrones exige aproximaciones resolutivas de la ecuación que afrontan como complicación principal la identidad de los dos electrones, sin contrapartida clásica. En ese cuadrante teórico, dos partículas, pese a su identidad primordial, podrían diferenciarse por sus posiciones, determinables con absoluto rigor. El principio de incertidumbre normativa impone un límite a la precisión en la determinación de la posición que dificulta la distinción de dos partículas idénticas características en el dominio mecano-cuántico (la misma imagen de una trayectoria-órbita perfectamente definida se desvanece en ese contexto, cediendo el testigo a la nube de probabilidad de presencia u orbital).

El principio de indiscernibilidad tiene especial cobertura en el terreno mecano-cuántico, cerniendo su sombra sobre la ecuación de onda. La finitud de la extensión de la función de onda de una partícula aboca inevitablemente al solapamiento con las funciones de onda de otras, suscitando el problema de la indiscernibilidad como un motivo de trasfondo cuántico. El caso de dos partículas idénticas no interactivas en el seno de un pozo rectangular infinito unidimensional lo ilustra. Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para dos partículas de masa coincidente m y coordenadas respectivas x_1, x_2 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right] + U\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2)$$

Para el pozo rectangular infinito, la solución a la ecuación de onda en su interior ($U=0$), nula en las paredes, recuerda la de una partícula en un pozo bidimensional:

$$\psi_{nm} = \psi_n(x_1)\psi_m(x_2)$$

donde ψ_n y ψ_m serían las funciones de onda para cada partícula idealmente solitaria en el pozo infinito, n y m los números cuánticos respectivos de las partículas 1 y 2.

La probabilidad de encontrar una partícula 1 en la región dx_1 centrada en x_1 y una partícula 2 en el entorno dx_2 del punto x_2 equivaldría al producto de las probabilidades locales individuales: $\psi_{nm}^2(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \psi_n^2(x_1)\psi_m^2(x_2)dx_1dx_2$, si bien la indiscernibilidad impediría *a priori* la discriminación posicional de ambas.

La densidad de probabilidad de presencia es insensible, pues, a la conmutación:

$$\psi^2(x_1, x_2) = \psi^2(x_2, x_1)$$

a diferencia de la función de onda, que podrá ser simétrica [$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$] o antisimétrica [$\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1)$]

Se vislumbra ya una figura transgresora del principio de indiscernibilidad, aunque la función de onda ψ_{nm} no sea simétrica ni antisimétrica. La permutación de x_1 y x_2 saldaría una función de onda distinta (ψ_{mn}) insinuante de la criba de partículas. La dilucidación de la simetría o la antisimetría de una función de onda pasa por la suma o diferencia de subfunciones conmutadas:

$$\psi_{\text{simétrica}} = \psi_{nm} + \psi_{mn} = A'[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) + \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)]$$

$$\psi_{\text{antisimétrica}} = \psi_{nm} - \psi_{mn} = A'[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) - \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)]$$

La función de onda antisimétrica, según se aprecia, sería idénticamente nula para todos los valores de x_1 y x_2 a igualdad de n y m (la simétrica, no), de suerte que si la función descriptiva de dos partículas idénticas fuese tal, los números cuánticos n y m de las partículas habrán de ser distintos. El principio de exclusión de Pauli veta la posibilidad de que dos electrones puedan ocupar un mismo estado cuántico en un átomo (igualdad de números principal, azimutal y magnético devenga spin antiparalelo). Su competencia se extiende al núcleo (dos protones o dos neutrones no podrían exhibir idéntica secuencia de números cuánticos). Los fermiones (electrones, neutrinos, nucleones o quarks constitutivos, ...), partículas subatómicas de spin semientero, se rigen por este principio, no sujetos a indiscernibilidad por rastreables, al menos, en el signo de la rotación intrínseca (la función de onda global de dos o más fermiones idénticos habrá de ser antisimétrica). Los bosones, por el contrario, obedecen a funciones de onda simétricas, su spin es entero.

El fotón, *Lichtquant* einsteiniano de números leptónico y bariónico nulos, es el bosón gauge responsable de todas las formas de interacción electromagnética, dando expresión corpuscular a la luz. Las fórmulas clásicas de energía y *momentum* de la radiación electromagnética son legibles en clave de eventos fotónicos (la presión de radiación sobre una superficie se debería a la transferencia instantánea de momento lineal por unidad de área; el efecto fotoeléctrico, resultado de la movilización de fotoelectrones por radiación incidente de frecuencia superior a la umbral, ...), partículas tuteladas por una función de onda simétrica que augura indiscernibilidad, sin límite alguno para un estado ligado de multitud de bosones idénticos en el número de ellos que pudieran ocupar un mismo nicho espacial (no hay limitación para el número de bosones en el mismo estado cuántico).

La adopción para la descripción de un sistema de N partículas idénticas de la función de onda $\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t)$ –los subíndices acopian todas las variables concurrentes en la positación de una única partícula: las tres coordenadas espaciales más la variable de spin, caso de partículas que lo acrediten– presume la preservación de identidad individual en condiciones de integración en un sistema, supuesto de dudosa generalidad, amén de la

arbitrariedad inherente al concepto «partícula» que relegaría la identidad a una convención (dos partículas discernibles en carga, masa, momento magnético, ..., protón y neutrón, podrían computarse como estados distintos de una misma especie, el nucleón: nucleones idénticos con diversos autovalores de la variable dinámica spin isobárico). La ampliación de la noción de partícula por composición que incluyese grados internos de libertad no obsta el vigor de una identidad cuántica.

La probabilidad temporal de presencia de partículas 1, 2, ..., N en los entornos respectivos $[\xi_{1...N}, \xi_{1...N} + d\xi_{1...N}]$: $|\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t)|^2 d\xi_1 \dots d\xi_N$, es insensible a cualquier permutación de argumentos, irrelevante el orden de enumeración de intervalos, por ser idénticas las partículas:

$$|\Psi[\tau(j, k)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t)]|^2 = |\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t)|^2$$

Sin embargo, la función de onda de un sistema de partículas idénticas es simétrica o antisimétrica respecto al intercambio de argumentos. Una transposición que entrañe permutación de argumentos $\xi_j \leftrightarrow \xi_k$ de Ψ tendría el siguiente efecto sobre ella:

$$\begin{aligned} \tau(j, k)\Psi &= \Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N, t) = \\ &= e^{i\alpha_{jk}}\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k, \dots, \xi_N, t) \end{aligned}$$

Puesto que la iteración de permutación devuelve al estado inicial $[\tau(j, k)\tau(k, j) = 1] \rightarrow e^{2i\alpha_{jk}} = 1$, resultan dos posibilidades: $e^{i\alpha_{jk}} = 1, -1$, dejando invariante cualquier transposición a Ψ o invirtiendo su signo (la antisimetría no parece perfilarse como indicador de íntima variación configuracional).

El hamiltoniano del sistema ($\hat{H}_{(\vec{r}, t)}$) habrá de ser simétrico respecto a la conmutación de designaciones: $\hat{H}_{(\vec{r}, t)}\Psi_N$ asimila su simetría o antisimetría a $\Psi_N(t)$, carácter que se conserva en el curso temporal, replicado por $\Psi_N(t + dt)$, ... En el estado estacionario de energía total E :

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \Psi_N$$

El signo de la simetría por intercambio de Ψ_N reproduce el de $\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t)$, sin posibilidad de conjunción de tipos de simetría en un mismo sistema de partículas idénticas. La simetría de intercambio de dos sistemas de partículas no se verá modificada por inclusión en otro mayor (la simetría congruente de las funciones de onda de dos partículas idénticas 1 y 2 no cambia por subsunción en un sistema 1+2, cuya simetría concordará también con la de sus componentes: todos los estados de un sistema de partículas idénticas convienen en signo de simetría, todos serán simétricos o antisimétricos según la naturaleza bosónica o fermiónica de sus participantes).

Ψ_N tendrá una simetría definida por intercambio, desglosable en el producto de una función de onda orbital (dependiente de las coordenadas locales) y otra aglutinante de las variables de spin: $\Psi_N(\mathbf{r}_i, \sigma_i) = \varphi(\mathbf{r}_i) \zeta(\sigma_i)$. En aproximación no relativista, la ecuación de Schrödinger determina únicamente $\varphi(\mathbf{r}_i)$. Una consecuencia de la simetría de intercambio definida en sistemas de partículas idénticas cuyas interacciones no involucren al spin es la dependencia de su energía del spin total. La invarianza del hamiltoniano del sistema con la permutación de partículas por identidad de éstas arrastra a ese destino a la propia ecuación de Schrödinger. La contracción de Ψ_N a la función orbital en sistemas bosónicos infunde simetría a $\varphi(\mathbf{r}_i)$, invalidando algunos niveles de energía resolutivos de la ecuación. En todo caso, las posiciones de las partículas identificables estarán o no correlacionadas en virtud de la simetría de intercambio de la función de onda. Las funciones espaciales de onda, simétrica y antisimétrica, normalizadas pero no necesariamente ortogonales, para dos partículas en estados cuánticos de cédulas orbitales $\varphi_p(\mathbf{r})$ y $\varphi_q(\mathbf{r})$ (deficiencia de ortogonalidad mensurada por el producto escalar $\delta = \varphi_p \varphi_q$) serían:

$$\varphi_s = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta^* \delta)}} [\varphi_p(\mathbf{r}_1) \varphi_q(\mathbf{r}_2) + \varphi_q(\mathbf{r}_1) \varphi_p(\mathbf{r}_2)]$$

$$\varphi_a = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \delta^* \delta)}} [\varphi_p(\mathbf{r}_1) \varphi_q(\mathbf{r}_2) - \varphi_q(\mathbf{r}_1) \varphi_p(\mathbf{r}_2)]$$

El factor de normalización y los términos de interferencia desvían a las densidades de probabilidad orbital ($\varphi_s^* \varphi_s$ y $\varphi_a^* \varphi_a$) del resultado clásico en el que la posibilidad de hallar a dos partículas de un sistema complejo que fluctuase en equiprobabilidad entre los estados cuánticos φ_{pq} y φ_{qp} en los entornos de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 [$\varphi_{pq}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varphi_p(\mathbf{r}_1)\varphi_q(\mathbf{r}_2)$, y similar descomposición para $\varphi_{qp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$] será:

$$\frac{1}{2} [|\varphi_p(\mathbf{r}_1)|^2 |\varphi_q(\mathbf{r}_2)|^2 + |\varphi_q(\mathbf{r}_1)|^2 |\varphi_p(\mathbf{r}_2)|^2]$$

Es el solapamiento de funciones de onda orbitales el que decide, en última instancia, la indiscernibilidad. Si φ_p y φ_q no se superponen: $\frac{1}{\sqrt{2(1+\delta\cdot\delta)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (por ser: $\delta = 0$) y el término de interferencia se anula, las partículas idénticas se comportarían como si fueran distinguibles, sin correlación posicional:

$$\varphi_s^* \varphi_s = \varphi_a^* \varphi_a = \frac{1}{2} [|\varphi_{pq}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 + |\varphi_{qp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2].$$

El solapamiento de funciones de onda de partículas idénticas no permitiría distinguir una de otra, las probabilidades de presencia asociadas a las funciones simétrica y antisimétrica incluirán términos discriminatorios de interferencia entre φ_{pq} y φ_{qp} que incoan correlación posicional con nula probabilidad de coincidencia local en antisimetría, como si las partículas se repelieran, pero posibilidad creciente de esa eventualidad respecto a la estimada en caso de diferenciación.

Desde el enfoque *clásico*, centrar el debate de la indiscernibilidad en coordenadas espacio-temporales, como hará la teoría de haces universales, además de una subliminal regresión a la apuesta por la individuación accidental (la posición espacio-temporal no es sustancial para el individuo), delega la solución en una condición accesoria, una circunstancia fenomenológica disruptiva de la ensidad óptica del átomon-arjé sin dotación cualitativa, detonante del viraje hacia el átomon-stoijeion, aparente en su cualificación y enajenado, por consiguiente. Las proposiciones que

recusan la simultaneidad de plurales locaciones para un objeto material o la coincidencia posicional instantánea de cuerpos diferentes remiten el problema de la *identitas indiscernibilium* al propio espacio-tiempo, desvirtuando la calidad de formas puras *a priori* de la sensibilidad. El concepto de *tiempo propio* irrumpe en escena. La dilatación temporal relativista disyunta convergencia local de sucesos –emisión y recepción de pulso luminoso– en *tiempo propio* y discordancia local en *tiempo impropio*, cualquier intervalo de éste será siempre mayor que el de *tiempo propio*: $\Delta t_{impr} = \gamma \Delta t_{pr}$ (lapso temporal propio multiplicado por el factor de Lorentz, superior a la unidad, de ahí el desfase cronológico, no ya entre observadores inercial y no inercial, sino inerciales en reposo y móvil, efecto a considerar en la modulación epistemológica del principio de *identitas*: la acotación local de inicio y fin de suceso está sujeta al valor propio o impropio del tiempo afín al estado de observación).

En otra vertiente, la espacio-temporalidad podría pasar a ser propiedad sustantiva de objeto, no *circumstantia rei* en acta habitual clásica. Las formas puras kantianas de sensibilidad interna y externa estarían sustanciadas como propiedades intrínsecamente objetivas (inmanencia sustantiva del espacio-tiempo en la *res*) en vez de priorizadas a la sustantivación fenoménica del objeto individuado. Ese carácter sería transfundido al principio de *identitas*, erigido en tesis metafísica arbitraria, no exenta de incompatibilidad con el visado universal de las propiedades sobre las que se sustente (O’Leary-Hawthorne 1995, 193ss). La sustanciación de la espacio-temporalidad como propiedad intrínseca de objeto desmarcaría al principio de la experiencia, trocando asiduos credos en enunciados no empíricos (contingencia de un escolio de indiscernibilidad restringido a mundos y objetos espacio-temporalmente posibles)¹.

¹ La controversia sobre el carácter del principio de *identitas* clona en su *nervus probandi* la polémica sobre el signo del principio de causalidad: *a posteriori* y contingente por enraizado en la experiencia para Hume, una simple generalización empírica de valor no estrictamente universal; sintético *a priori* en óptica kantiana. Desde este ángulo, la errada apreciación del escocés radicaría en la confusión de las leyes particulares de causalidad con el principio general.

La *identitas indiscernibilium* se dirime sobre el solapamiento de funciones de onda simétrica o antisimétrica, amplificado su sentido: $\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ no es una simple función relatora del estado cuántico de un sistema sino una función de universo solidaria a observador que imprime un giro epistemológico a la cuestión. No sólo las relaciones espaciales, también las de estado o fásicas son propiedades configuracionales, y las variables concertadas se pliegan a un canon basal de simetría o antisimetría bajo alteración o no de signo de la función de microuniverso por conmutación. Aun cuando la función de onda tuviese pretensión ontológica, su carácter simétrico o antisimétrico sería propiedad relacional de observación: una partícula no es en su ensidad óptica indistinguible de otra idéntica por superposición de funciones de onda en asimetría o simetría, se presta a esa razón o se ofrece bajo ella a un observador que evalúa el estado de universo conformado por ambas. La discernibilidad o indiscernibilidad en identidad compulsa así una posición epistemológica (si se prefiere, se trataría de una cuestión ontológica en tanto esa misión recaiga sobre una conciencia develante en irrupción intencional, mas no óptica, por no ser el solapamiento de la función de onda propiedad de cosa *en sí* cuanto delación de cosa observada o fenomenalizada –la ontología como fenomenología–). Sea como fuere, lo que individúa a un sistema es un colapso singular de la función de onda (adhesión a la idea de individuación intrínseca o *per modum essentiae*, lejos de la accidental singularidad espacio-temporal), colapso que sí podría tildarse de suceso óptico (tesis de una *prima ratio formalis singularitatis signatae per aliquid per se intrinsecum singulari*). Funciones de onda traslapadas, simétrica o asimétrica, dibujan universos posibles en inspección, universos auditados en los que los componentes se comportan o no como si fuesen discernibles.

El postulado de asimetría, vigente incluso cuando no sean asignables números cuánticos a las partículas, incumbe a una función representativa, un recurso implementado de diagnosis, herramienta de exploración epistemológica que habilita el principio de indiscernibilidad o le asiste; la nula interferencia o la ortogonalidad de funciones orbitales no revelan propiedades intrínsecas de partículas, ni relaciones internas, sino relatividad a una tercera figura de universo, un observador en su inepción sintáctica de

mundos posibles abiertos a examen fáctico o conjetural por instrumentación de una función asumible como ontológica en la visual señalada (la discernibilidad es propiedad relacional de partículas a un observador, o entre partículas en cuanto observadas, la pretendida *correlación de posiciones* por solapamiento transluce la intrusión de una autoposición referente de observación implantando relaciones extrínsecas).

Cada hamiltoniano definido sobre el espacio fáctico está asociado a un conjunto de trayectorias de evolución temporal (foliación unidimensional del espacio de fases por rutas no intersectantes), inspirando la idea de una individuación fotónica por geodésicas (líneas de curso inercial en el espacio-tiempo que, en ausencia de fuerzas no-gravitatorias, no son rectas -vector tangente isótropo, métrica de Schwarzschild, etc), pero el debate Fraassen-Cortes sólo evidencia la escisión de planos en el sondeo del principio leibniziano, epistémico (observador frente a microuniverso dibosónico) y metafísico (universo de dos bosones en sí mismo). La dualidad metafísica de objetos cuánticos (fotones) de idénticas propiedades en un segmento temporal por convergencia de líneas históricas reorienta el interrogante sobre su discernibilidad, no a la divergencia futura de geodésicas lumínicas, disociadas también en el pasado, sino a la capacidad epistémica del observador para decidir la unívoca correspondencia de cada expediente histórico (pasado-futuro) en el período de solapamiento. La asunción de la rigurosa identidad de fotones en “misteriosa interacción no local” (Einstein 1924, 261–267) sólo es una exigencia de la simetría, que no cumple un papel ontológico-individuante sino epistemológico-(no)discriminante.

El enunciado del principio parece enlazar un requisito metafísico subyacente al *eigenvalor* de la función de onda (dualidad de partículas en identidad ontológica por coincidencia provisional de propiedades con superposición de *history-lines*) y un epistemológico (capacidad del observador para identificar los fotones por sus geodésicas pasada y futura en el lapso temporal de confluencia). La denegación de individualidad al fotón sobre la interpretación de Copenhague (plácet de simultaneidad posicional para dos fotones por la simetría de la función de onda, no limitante del número de bosones en el mismo estado cuántico), no indivisible siquiera por su

acta histórica, dada la imposibilidad lógica de precisar la pertenencia del historial en el intervalo de compartición de propiedades espacio-temporalmente co-ocurrentes, no prueba la violación del principio leibniziano por estos bosones, bajo la premisa de restricción a entidades individuables (Cortes 1976, 504), sólo funde las demandas epistemológica y metafísica del principio para objetos susceptibles de diferenciación por trayectorias históricas únicas (Barnette 1978, 469–470).

El cariz tautológico de la desamortización existencial de dos objetos indiscernibles que pudiera socavar la veracidad del principio descansa sobre la ausencia de relaciones de simetría o antisimetría en universos clausurados, cerrados a la observación. La interna contradicción del enunciado que no declina la dualidad en indiscernibilidad (Keene 1956, 252–254) se salvaría por quiasmo de planos (dualidad óptica / indiscernibilidad epistemológica: dos objetos, no en apriorizado hiato noemático sino en ocasión óptica singular, la ensidad de uno en alteridad óptica al otro, consignados A y B –intervención de observador que constata propiedades idénticas–, no podrían separarse siendo indiscernibles; el principio insta al isomorfismo *ordo essendi* – *ordo cognoscendi*, añadiendo a la biunívoca correspondencia entre fenómeno concreto de ser y noticia *genita* una nota epistemológica de correlación que el observador trasladaría al orden real), conjugación no lesiva en tanto no encubra transición de contingencia óptica a necesidad onto-lógica que subordine la presunta infalibilidad del principio a la vulneración de una norma de mimetismo interordinal.

Un último giro en el poliédrico visor advierte inéditas consecuencias de la instrucción cuántica de la *identitas*. Encausada la función de onda como una privativa credencial de sistema que extracte así su estadio ontológico (desplazada la *delatio* epistemológica a la densidad de probabilidad presencial que reviste de sentido “físico” ordinario a la función de onda), dado que la correlación posicional de indiscernibles está supeditada al solapamiento de funciones de onda, recabando una relación espacial intrínseca, no extrínseca, de universo no expugnado por incursión interna de observador, si las relaciones espaciales intrínsecas han de ser conformantes de sistema, si han de modular la simetría del universo (Black 1952, 162–163), siendo

la simetría global congruente con la de sus fracciones, la disparidad de dos objetos idénticos en perfecta simetría no estaría sujeta a la presencia de un observador como apunta el pionero de la lógica de *conjuntos vagos*. En condiciones de simetría o asimetría sistémica, dos partículas se individualizan por déficit de correlación posicional si sus funciones de onda no solapan (la condición de obyacencia que fenomenaliza potencialmente esas singularidades invoca al cuadrado de esa función).

2. El océano tenebroso de Dirac: teoría de los huecos en el marco de una ontología modal

Además del momento angular orbital cifrado en el número cuántico l , un electrón atómico posee momento de spin (sistemas clásicos análogos lo atesoran: la Tierra en rotación alrededor de su eje –la elíptica estacional renta un momento angular extrínseco–; el giróscopo, con un movimiento angular de precesión suplementario al spin). El momento angular total es la suma de ambos ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$). En horma clásica, cuantifica el momento de la resultante dinámica sobre el sistema, sin restricción direccional alguna, cuyo módulo puede adoptar cualquier valor comprendido entre $|\vec{L}| + |\vec{S}|$ y $|\vec{L}| - |\vec{S}|$, pero de directrices restringidas y módulo cuantizado en el orden que nos ocupa, por la cuantización modular de \vec{L} y \vec{S} y sus constreñidas direcciones. El módulo del momento angular total \vec{J} para un electrón caracterizado por el cuántico orbital l es: $\sqrt{j(j+1)}\hbar$, con $j = l + \frac{1}{2}$ o $l - \frac{1}{2}$ si $l > 0$ ($j = +\frac{1}{2}$ si $l = 0$). El número cuántico de spin es crucial en el efecto spin-órbita determinante del desdoblamiento de estructura fina espectral y en la discernibilidad de partículas subatómicas idénticas por una propiedad intrínseca, no relacional, al margen de coyunturas espacio-temporales.

El principio de exclusión está vinculado a la antisimetría de la función de onda fermiónica. La ecuación de onda independiente del tiempo para un sistema de N electrones (estado estacionario) luce la forma:

$$H\Psi_N = \left(\sum_{i=1}^N H_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) \right) \Psi_N = E\Psi_N$$

La función de onda del átomo con electrones distribuidos en los estados $\{\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_N}\}$ y constelación de tétradas de números cuánticos $\{(n, l, m_l, s)_{i_1}, \dots, (n, l, m_l, s)_{i_N}\}$, puede expresarse como sigue:

$$\psi_N = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{i_1}(\xi_1) & \dots & \psi_{i_1}(\xi_N) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \psi_{i_N}(\xi_1) & \dots & \psi_{i_N}(\xi_N) \end{vmatrix}$$

El determinante de Slater muestra a ψ_N como una combinación lineal que censa $N!$ permutaciones de argumentos $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$, antisimétrica para toda conmutación de ellos (garantía del principio de exclusión) e idénticamente nula si cualquier par de fermiones se encontrase en el mismo estado cuántico. ψ_N se anula en caso de igualdad de dos argumentos (dos columnas del determinante serían entonces iguales: imposibilidad de coincidencia local de dos fermiones con el mismo spin). La ilícita adjudicación de cada estado ocupado a una partícula concreta dentro de un modelo de campo autoconsistente, con la cláusula de simetría definida por intercambio, impide formalizar la función de onda para un sistema de partículas idénticas e independientes como producto seriado de funciones singulares: $\psi_N \neq \prod_{i=1}^N \psi_{i_N}(\mathbf{r}_i, \sigma_i)$. En ese esquema de independencia debe calibrarse la cancelación del principio de *identitas* leibniziano sobre el postulado de expansión inductiva del compendio de propiedades compatibles para un individuo y la exportabilidad del conjunto a otro por extrapolación de cualquier propiedad intensiva. Si la individuación ha de consistir en la documentación completa de una entidad por conjunción única de atributos, aun cuando una propiedad pudiera cualificar a un número indeterminado de objetos, el principio de identidad hipotecaría su validez en la unicidad de facciones de predicables tácitamente universales. El campo de propiedades cualificantes de un objeto podría tener una traza emergente de individualidad, o bien alguna propiedad especial del conjunto que proporcione la plena descripción de un ente debiera ostentar seña inalienable de unicidad, y sería al amparo de esta segunda opción (una función de individuación signada para algunas características) que cabría contrastar el principio de *identitas*,

cuya competencia se atendería a la inscripción de las relaciones espaciales en la categoría «propiedad» (O'Connor 1954, 103–110).

Las partículas de momento angular intrínseco semientero, avaladas por el principio de exclusión de Pauli, reclaman la ecuación de Dirac, una extensión relativista de la ecuación de Schrödinger, que prevé propiedades físicas invariantes en un marco de referencia galileano, mas no en una referencia lorentziana (las transformaciones de Galileo se identifican con las de Lorentz en el límite de pequeñas velocidades, describiendo correctamente fenómenos la ecuación en su forma no relativista sólo cuando las velocidades de las partículas involucradas sean despreciables respecto a la luminosa; los fenómenos que implican interacción luz-materia, con emisión, difusión o absorción de fotones, se desvían de sus previsiones). La equivalencia relativista masa-energía se traduce en la posibilidad de creación o aniquilación de partículas en interacciones con intercambios de energía de magnitud igual o superior a la energía en reposo de las partículas interactuantes, debiendo reunir la teoría cuántica relativista en un mismo cuadro a estados dinámicos diferenciados, no sólo en la fase cuántica, también en la naturaleza y número de partículas elementales configurantes (indispensable el recurso del campo cuantizado). La incongruencia de orden de la derivada espacial (laplaciano) y la temporal (primer orden) demanda un reajuste por equivalencia relativista de coordenadas, la adaptación pasaría por la introducción del *hamiltoniano de Dirac*² que admite soluciones negativas de energía sugerentes de antimateria³.

² Remodelado el invariante relativista del cuádrimensor ($E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$) por inclusión de operadores cuánticos (operador energía dado por la ecuación de Schrödinger):

$$(i\hbar\partial_t)^2 = (-i\hbar c\nabla)^2 + (mc^2)^2 = H^2.$$

El hamiltoniano más general que cumple la ecuación anterior es: $H = \vec{\alpha}(-i\hbar c\nabla) + \beta mc^2$ (con tres componentes para $\vec{\alpha}$ y una para β bajo transformaciones de Lorentz (Messiah 1999, 827–843).

³ En teoría no relativista, el electrón está representado por un spinor dual cuyas leyes de transformación por rotación son las de un momento cinético semientero ($\frac{1}{2}$). En un marco relativista debe ser descrito por una función de onda matricial de varianza determinada respecto al más amplio grupo de transformadas de Lorentz:

$$\Psi(\vec{r}, s, t) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

El vacío energotélico está vedado en el dinamismo hilemórfico que contempla la física aristotélico-tomista. La teoría de los huecos energéticos, con valores negativos de energía ($E = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$) que satisfacen la ecuación de Dirac y estatuyen el vacío en estado cuántico completo e inobservable (*plenum* de electrones refractario a adicionales injerentes) sólo tendría asiento en clave esencialista. La *pantalasa* electrónica, el océano negativo de huecos ontológicos es vestigio de kénosis. Huéspedes imposibles y soluciones parásitas de masa negativa desafían la armonía energética fundidas en un ocre inhóspito, una amenaza letal para la homeostasis onto-eidética.

Como en la caracterización no relativista, también puede considerarse a Ψ función de las variables orbital (\vec{r}) e intrínseca (s). Una función de onda de este tipo representa cierto vector estado $|\Psi(t)\rangle$. El espacio de estados se obtendría mediante producto tensorial del espacio de variables orbitales y el de variables de spin, la onda Ψ visa un vector: $\Psi(\vec{r}, s, t) \equiv \psi_s(\vec{r}, t) \equiv \langle \vec{r}s | \Psi(t) \rangle$. Probabilidad de densidad de presencia en un punto: $P(\vec{r}, t) = \sum_{s=1}^n |\psi_s|^2$. Sobre esa hipótesis, la ecuación de onda adopta la forma: $i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_D \Psi$. Puesto que Ψ define plenamente el estado dinámico instantáneo del electrón, la ecuación de onda será de primer orden respecto al tiempo, la hermiticidad del operador H_D garantiza la coherencia de la expresión de la probabilidad. La ecuación de onda relativista buscada debe mantener cierta simetría formal entre las coordenadas espaciales y temporal, primer orden, por tanto, respecto a aquellas también. En ausencia de campo, el hamiltoniano para un electrón sería independiente de \vec{r} (invarianza por traslación): $H_D = \vec{\alpha}(x, y, z)\vec{p} + \beta m \rightarrow [E - \vec{\alpha}\vec{p} - \beta m]\Psi = 0$ (regla de correspondencia de Schrödinger: $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \rightarrow -i\nabla$. Los hermíticos $\vec{\alpha}$ y β operan únicamente sobre las variables de spin). El principio de correspondencia permite fijar $\vec{\alpha}$ y β por exigencia de la ecuación de Klein-Gordon para un electrón bajo el potencial electromagnético $A^\mu(\varphi, \mathbf{A})$: $\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)^2 - \left(\frac{1}{i}\nabla - e\mathbf{A}\right)^2\right]\Psi = m^2\Psi \rightarrow [E^2 - (-i\nabla)^2 - m^2]\Psi = 0$. La ecuación de Dirac del electrón libre: $[E - \vec{\alpha}\vec{p} - \beta m]\Psi = 0$, en la que las matrices hermíticas $\vec{\alpha}$ y β anticonmutan ($\alpha^k\alpha^l + \alpha^l\alpha^k = 0$ y $\alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0$, $k \neq l$) con cuadrados unitarios ($\beta^2 = 1$, $(\alpha^k)^2 = 1$), serviría de base para la ecuación relativista de ese fermión sometido ahora a un campo electromagnético, por simple sustitución $E \rightarrow E - e\varphi$, $\vec{p} \rightarrow -i\nabla - e\mathbf{A}$:

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right) - \vec{\alpha}(-i\nabla - e\mathbf{A}) - \beta m\right]\Psi = 0.$$

De la que se desprende el hamiltoniano de Dirac en presencia de campo: $H_D = e\varphi + \vec{\alpha}(-i\nabla - e\mathbf{A}) + \beta m$

La idea misma de mutua aniquilación de entidades sensibles como simple efecto natural no podría tener cabida en un lienzo energetista en el que la existencia reporta un índice de necesidad en la línea de los dos componentes transcendentales de lo creado: *cuando algo es, necesariamente es* –sagital del *actus essendi*–, y *es necesariamente lo que es, no otra cosa* –línea de la esencia– (Kielkopf 1978, 13–21), sí en un escenario de radical contingencia en que la esencia, latente en su *realitas* metafísica disminuida de esencia neutra bajo contracción singular actual, depara indiferencia existencial aun a lo *simpliciter* real.

La ontología de la inmanencia culmina en el *Tractatus*, dejando abierto, eso sí, un horizonte al silencio más allá del *lógos* intramundano. Una ontología de estados en la que la forma de los objetos que articulan hechos conjura una posibilidad relacional, la de determinada conexión fáctica (el hecho, definido en sociedad de objetos sub-átomos, casi monádicos o imponderables en su simplicidad, sólo en relación: inaprehensibilidad directa del objeto). Las posibilidades de combinación objetual retributivas del hecho están codificadas en la forma del objeto, como lo están las posibilidades de despliegue existencial cuantizado de una esencia en ésta *sub modo* virtualmente actual en la metafísica modal. Los objetos son portadores de la sustancia del mundo. La sustancia, lo que subsiste en independencia del caso conectivo, permanece la misma cualesquiera que fueren los estados de cosas consumados (la esencia no se extingue en la mutación ni se agosta en la intrínseca modalización individual, por su raíz ejemplar, permanece *sí misma* bajo cada singularidad, y cabe, además, la transfiguración natural sin destrucción de esencia, pues el *ordo essentiae*, como *proprietas entis*, propiedad de una entidad unívoca en comisión eidética, es común a los mundos posibles). Sin la noción de sustancia se malogra la posibilidad de significado, el objeto al cual referir un nombre se acomoda a la *res rata* o a una esencia, ratificación ontológica del hecho, frente a la *res ut nomen* (el signo envía al objeto como denotación, una *suppositio* o suplencia nominal con referencia objetiva: *el nombre significa el objeto* –3.203– y el significado es uso nominal, un signo sin uso es asémico).

En esta ontología, el *Sachverhalt*, el estado de cosas, convoca al hecho atómico (subatomizable, a su vez, en objetos) en que cabría descomponer el *Tatsache* (Wittgenstein 1997, 233), y ese hecho presupone posibilidades realizadas, de manera que la afirmación fáctica sería inviable sin el asalto mental a una reserva de posibilidades frustradas. Pues bien, en este marco teórico, el hecho negativo no comporta vacío sémico –la consistencia semiótica se debe a la capacidad relacional, no sustancial, del sema– (lo haría la tautología: la correspondencia proposición-hecho hará que la proposición verdadera encuadre el mundo real en el conjunto de mundos posibles, discriminándolo de estados irrealizados de cosas, mientras que las proposiciones tautológicas llenan el espacio lógico sin distinción, excluidas del campo de significación). La realidad se configura como *existencia y no existencia de estados de cosas* (2.06), un retículo de hechos positivos y negativos, pero como la negación carece de correlato objetivo mundano (orfandad de correspondencia real), afirmación o negación serían divergencias lógicas desde un estado basal de cosas (la negación no anuncia estado alguno sino demisión del estado fáctico relativo a la afirmación). No hay soporte ontológico para la negación, más allá de una apofática objetiva de la adverbación. Ese podría ser uno de los sentidos de lectura de los huecos energéticos de Dirac: ausencia de acto (positivo), no indicativa de *vacuum* o laguna ontológica, más bien un foco antimaterial de aniquilación con liberación de *enérgeia* inmaterial (estados cuánticos de partícula y antipartícula conjugados por paridad y simetrías de carga y temporal, concordante representación irreducible del grupo de Poincaré)

Los huecos ontológicos refuerzan la revocación *in sensu diviso* del principio aristotélico de no simultaneidad de predicados mutuamente excluyentes en la floreciente lógica modal: la cópula «A y no-A» (tan próxima al *gedankenexperiment* de Schrödinger) no está minada por contradicción real puesto que, lejos del patrón estadístico de modalidades, la condición suficiente de posibilidad de A no requiere una frecuencia mínima de actualización en un mundo ya actual, sino la sola compatibilidad esencial de A con un estado alternativo actual a ese mundo: A podría ser verdadera “si alguna disyuntiva al mundo actual fuera actual” (Knuuttila 1981, 168), y esa conformidad tiene desenlace quiditativo, absuelta de *enérgeia*.

La objetualidad está diluida en la función ontológica de estado en favor de la relacionalidad, como se anticipó. El objeto se hace inaprehensible en sí, disuelto en una nebulosa relacional, una red de conexiones. La simplicidad del objeto y la mutua independencia de los estados (Wittgenstein 2016, 52) haría del particular un elemento preciso implicado en un estado de cosas no inductor de conclusiones sobre los restantes. El punto espacio-temporal perderá su particularidad en tanto de él se infieran propiedades de entorno ontológico.

Conclusión

El principio leibniziano de *identitas indiscernibilium*, precepto epistemológico por apelar a propiedades relacionales no genuinamente sustantivas, admite expediente cuántico. La lógica de segundo orden en que puede formularse el principio concierne en su corporación de variables representativas de propiedades sistémicas bajo efecto de cuantificadores con la alquimia cuántica de funciones de onda insensibles a transposiciones de argumentos, no en vano, reiteremos, el principio en su formato lógico ($\forall x, y \mid \forall \varphi (\varphi x \leftrightarrow \varphi y) \rightarrow x = y$) puede procesarse en registro cuántico: la conmutación de funciones de onda ($\varphi_p \leftrightarrow \varphi_q$) por solapamiento presentaría a partículas idénticas bajo un comportamiento indistinto (la indiscernibilidad desvela el comportamiento: dos partículas idénticas se conducen como indiscernibles o no por solapamiento de sus funciones de onda respectivas, ese avatar de la función no interpela a íntimos designios ónticos, sino a una disposición de observación).

Estipulada la prioridad de las leyes naturales que guían a los objetos en el espacio a la misma delimitación espacial, idea implícita en la aplicación cuántica del principio de *identitas* (el solapamiento o no de funciones de onda –ley física– dicta la correlación espacial), la verdad regente en el universo kantiano (dualidad de objetos idénticos discernibles) es imperativa también en el universo monádico leibniziano (unicidad de objeto por indiscernibilidad). Relación espacial determinada sustancialmente por la singularidad objetiva (sustantivación espacio-temporal en el objeto, *ubi* o *ratio locandi*

como algo propio del objeto –universo de Leibniz–) o relación espacial determinante de la singularidad objetiva (universo kantiano-newtoniano: espacio-tiempo absolutos, hipótesis metafísicas, o formas apriorizadas de la sensibilidad para la concreción fenoménica: sólo el espacio-tiempo relativos son accesibles por inducción; la relatividad de espacio y tiempo sería inferida de la medida sensible de los cuerpos y las relaciones intercorpóreas, pero en su naturaleza absoluta no guardan relación a nada externo)

La simetría definida por intercambio de la función de onda espacial para un sistema de partículas idénticas instruye correlación posicional, manifestándose la indiscernibilidad de dos de ellas por solapamiento de funciones orbitales normalizadas respectivas, φ_p y φ_q . La ortogonalidad de las funciones en condiciones de no superposición las distinguiría, pudiendo considerarse diversos y equiprobables sus estados: $\varphi_{pq}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varphi_p(\mathbf{r}_1)\varphi_q(\mathbf{r}_2)$ y $\varphi_{qp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varphi_q(\mathbf{r}_1)\varphi_p(\mathbf{r}_2)$. La densidad de probabilidad local de dos partículas idénticas pero discernibles, cada una en un estado cuántico indistintamente asignable a una u otra *a priori*, no engloba términos de interferencia, inexistiendo entre ellas correlación espacial.

Referencias

- Barnette, R. L. 1978. “Does Quantum Mechanics Disprove The Principle of The Identity of Indiscernibles?”. *Philosophy of Science* 45 (3): 466–470.
- Black, Max. 1952. “The Identity of Indiscernibles”. *Mind. A Quarterly Review of Psychology and Philosophy* 61 (242): 153–164.
- Burt, Edwin A. 1960. *Los fundamentos metafísicos de la ciencia moderna*. Buenos Aires: Sudamericana.
- Cohen, Bernard I. 1989. *El nacimiento de una nueva Física*. Madrid: Alianza Universidad.
- Cortes, Alberto. 1976. “Leibniz’s Principle of The Identity of Indiscernibles: A False Principle”, *Philosophy of Science* 43: 491–505.
- Dieks, Dennis and Marijn A. M. Veersteegh. 2008. “Identical Quantum Particles and Weak Discernibility”. *Foundations of Physics* 38 (10): 923–934.
- Einstein, Albert. 1924. “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases”. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Physikalisch-mathematische Klasse*: 261–267.

- Friebe, Cord. 2014. "Individuality, distinguishability, and (non-)entanglement: A Defense of Leibniz's Principle". *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 48: 89–98.
- Godwin, William. 1982. "Analysis and the Identity of Indiscernibles". *Analysis* 42/2: 80–82.
- Grelling, Kurt. 1936. "Identitas indiscernibilium". *Erkenntnis* 6: 252–259.
- Hacking, Ian. 1975. "The Identity of Indiscernibles". *The Journal of Philosophy* 72/9: 249–256.
- Hawley Katherine J. 2009. "Identity and indiscernibility". *Mind* 118 (1): 101–119
- Keene, Geoffrey B. 1956. "Note on the Identity of Indiscernibles". *Mind* 65 (258): 252–254.
- Kielkopf, Charles F. 1978. "Duns Scotus's Rejection of 'Necessarily Exists' as a Predicate". *Journal of History of Philosophy* 16 (1): 13–21.
- Knuuttila, Simo. 1981. "Time and Modality in Scholasticism". *Reforging the Great Chain of Being. Studies of the History of Modal Theories*. Dordrecht-Boston: Reidel.
- Langford, C. H. 1930. "Otherness and Dissimilarity". *Mind* 39: 454–461.
- Leibniz, Gottfried Wilhelm. 1942. *Discurso de metafísica*. Madrid: Revista de Occidente.
- Messiah, Albert. 1999. *Quantum Mechanics*. New York: Dover Publications.
- O'Leary-Hawthorne, John. 1995. "The Bundle Theory of Substance and the Identity of Indiscernibles". *Analysis* 55/3: 191–196.
- O'Connor, David J. 1954. "The Identity of Indiscernibles". *Analysis* 14/5: 103–110
- Peirce, Charles Sanders. 1933. *Collected Papers*. Edited by Charles Hartshorne & Paul Weiss. Cambridge: Harvard University Press.
- Russell, Bertrand. 1977. *Exposición crítica de la filosofía de Leibniz*. Buenos Aires: Siglo XX.
- Vaihinger, Hans. 1922. "Anhang – Das Paradoxonder symmetrischen Gegenstände". *Kommentar zur Kant's Kritik der reinen Vernunft*, vol. II, 518–532. El pasaje de Kant pertenece a KrV, B 319–320.
- Wittgenstein, Ludwig. 2016. *Tratado lógico-filosófico. Logisch-philosophische Abhandlung*, Prop. 2.061. Valencia: Tirant lo Blanch.
- Wittgenstein, Ludwig. 1997. "Extraits de lettres de Wittgenstein à Russell, 1912–1920" (Apéndice III). *Carnets 1914–1916*. Paris: Gallimard. Un *Sachverhalt* corresponde a una *Elementarsatz*, una proposición atómica, si es verdadera, en tanto el *Tatsache* responde al producto lógico de proposiciones elementales cuando el producto es verdadero.